

Kompendium Maturzysty: Termodynamika

Fizyka - Poziom Rozszerzony

Spis treści

1	Podstawy teorii kinetyczno-cząsteczkowej gazów	1
1.1	Kluczowe pojęcia i parametry	1
1.2	Najważniejsze wzory (Karta Wzorów CKE)	2
2	Przemiany gazowe	2
2.1	Przemiana izotermiczna ($T = \text{const}$)	2
2.2	Przemiana izochoryczna ($V = \text{const}$)	2
2.3	Przemiana izobaryczna ($p = \text{const}$)	2
2.4	Przemiana adiabatyczna ($Q = 0$)	3
3	Zasady Termodynamiki	3
3.1	I Zasada Termodynamiki	3
3.2	II Zasada Termodynamiki i Silniki Ciepłne	3
4	Przykłady Rozwiązanych Zadań	3
5	Zadania do samodzielnego rozwiązania	5
6	Wybrane zadania maturalne (CKE)	5
7	Przemiany Gazowe i Wykresy (Wymagane na CKE)	6

1 Podstawy teorii kinetyczno-cząsteczkowej gazów

Termodynamika klasyczna i teoria kinetyczno-cząsteczkowa opisują te same zjawiska z dwóch różnych perspektyw: makroskopowej (parametry stanu) i mikroskopowej (ruch cząsteczek).

1.1 Kluczowe pojęcia i parametry

- **Gaz doskonały:** Uproszczony model gazu, w którym zakładamy, że cząsteczki są punktami materialnymi (nie mają objętości własnej), zderzają się ze sobą i ze ściankami naczynia idealnie sprężyć, a pomiędzy zderzeniami nie oddziałują na siebie siłami przyciągania ani odpychania.
- **Parametry stanu:** Wielkości fizyczne jednoznacznie określające stan układu (ciśnienie p , objętość V , temperatura T , liczba moli n).
- **Temperatura bezwzględna (T):** Miara średniej energii kinetycznej ruchu postępowego cząsteczek. Skala Kelvina powiązana jest ze skalą Celsjusza wzorem:

$$T = t + 273,15$$

1.2 Najważniejsze wzory (Karta Wzorów CKE)

- Średnia energia kinetyczna ruchu postępowego cząsteczki:

$$E_k = \frac{3}{2}k_B T \quad (1)$$

gdzie $k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K to stała Boltzmanna.

- Równanie stanu gazu doskonałego (Równanie Clapeyrona):

$$pV = nRT = Nk_B T \quad (2)$$

gdzie: p - ciśnienie, V - objętość, n - liczba moli, $R \approx 8,31$ J/(mol·K) - uniwersalna stała gazowa, N - liczba cząsteczek.

- Energia wewnętrzna gazu doskonałego (U):

$$U = c_V nRT = \frac{f}{2} nRT \quad (3)$$

gdzie f to liczba stopni swobody cząsteczki ($f = 3$ dla gazów jednoatomowych, np. hel; $f = 5$ dla dwuatomowych, np. tlen O_2). c_V to ciepło molowe w stałej objętości.

2 Przemiany gazowe

2.1 Przemiana izotermiczna ($T = const$)

Prawo Boyle'a-Mariotte'a. Gaz wymienia ciepło z otoczeniem, aby zachować stałą temperaturę.

- **Równanie:** $pV = const$ (czyli $p_1 V_1 = p_2 V_2$).
- **Wykres $p(V)$:** Hiperbola.
- **Energetyka:** $\Delta U = 0$ (bo $\Delta T = 0$), stąd z I zasady termodynamiki $Q = -W$ (ciepło pobrane równe jest pracy wykonanej przez gaz).

2.2 Przemiana izochoryczna ($V = const$)

Prawo Charles'a.

- **Równanie:** $\frac{p}{T} = const$.
- **Wykres $p(V)$:** Linia pionowa (brak zmiany objętości).
- **Energetyka:** $W = 0$ (gaz nie wykonuje pracy). Ciepło pobrane zmienia się w całości w energię wewnętrzną: $Q = \Delta U = n c_V \Delta T$.

2.3 Przemiana izobaryczna ($p = const$)

Prawo Gay-Lussaca.

- **Równanie:** $\frac{V}{T} = const$.
- **Wykres $p(V)$:** Linia pozioma.
- **Energetyka:** $W_{gaz} = p \Delta V$ (praca gazu). Ciepło wymienione: $Q = n c_p \Delta T$, gdzie $c_p = c_V + R$ (zależność Mayera).

2.4 Przemiana adiabatyczna ($Q = 0$)

Przemiana tak szybka, lub w tak dobrze izolowanym naczyniu, że gaz nie zdąży wymienić ciepła z otoczeniem.

- **Równanie (poisson):** $pV^\kappa = \text{const}$, gdzie $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ (wykładnik adiabaty).
- **Wykres $p(V)$:** Krzywa bardziej stroma niż izoterma.
- **Energetyka:** $\Delta U = W$ (praca wykonana nad gazem powoduje wzrost jego energii wewnętrznej i temperatury).

3 Zasady Termodynamiki

3.1 I Zasada Termodynamiki

Zmiana energii wewnętrznej układu (ΔU) jest równa sumie ciepła (Q) dostarczonego do układu i pracy (W) wykonanej nad układem przez siły zewnętrzne:

$$\Delta U = Q + W \quad (4)$$

Uwaga na znaki:

- $Q > 0$ układ pobiera ciepło, $Q < 0$ układ oddaje ciepło.
- $W > 0$ siły zewnętrzne wykonują pracę nad układem (sprężanie gazu).
- $W < 0$ układ (gaz) wykonuje pracę kosztem energii zewnętrznej (rozprężanie gazu).

Praca gazu to $W_{\text{gaz}} = -W$.

3.2 II Zasada Termodynamiki i Silniki Ciepłne

Nie można zbudować silnika cieplnego, który pobierając ciepło z jednego źródła, zamieniałby je całkowicie na pracę (nie istnieje perpetuum mobile drugiego rodzaju). Ciepło naturalnie płynie od ciała cieplejszego do chłodniejszego.

Sprawność silnika cieplnego (η):

$$\eta = \frac{W_{\text{gaz}}}{Q_p} = \frac{Q_p - |Q_o|}{Q_p} = 1 - \frac{|Q_o|}{Q_p} \quad (5)$$

gdzie Q_p to ciepło pobrane ze źródła (grzejnika), a Q_o to ciepło oddane do chłodnicy.

Cykl Carnota (silnik idealny): Silnik o maksymalnej możliwej sprawności działający między temperaturami T_1 (grzejnik) i T_2 (chłodnica). Składa się z dwóch izoterm i dwóch adiabat.

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (6)$$

4 Przykłady Rozwiązanych Zadań

Przykład 1: Przemiana izobaryczna

Treść: Dwa mole gazu doskonałego jednoatomowego pod ciśnieniem $p = 10^5$ Pa podgrzano izobarycznie, w wyniku czego objętość gazu wzrosła od $V_1 = 20 \text{ dm}^3$ do $V_2 = 50 \text{ dm}^3$. Oblicz wykonaną przez gaz pracę, zmianę jego energii wewnętrznej oraz ilość ciepła dostarczonego do gazu.

Rozwiązanie:

1. Praca wykonana przez gaz:

$$\Delta V = (50 - 20) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\Delta V = 0,03 \text{ m}^3$$

$$W_{\text{gaz}} = p\Delta V$$

$$W_{\text{gaz}} = 10^5 \cdot 0,03$$

$$W_{\text{gaz}} = 3000 \text{ J} = 3 \text{ kJ}$$

$$W = -3000 \text{ J} \quad (\text{praca sił zewnętrznych})$$

2. Zmiana energii wewnętrznej: Dla gazu jednoatomowego $U = \frac{3}{2}pV$, więc:

$$\Delta U = \frac{3}{2}p\Delta V$$

$$\Delta U = 1,5 \cdot 3000 \text{ J}$$

$$\Delta U = 4500 \text{ J} = 4,5 \text{ kJ}$$

3. Ciepło pobrane: Z I zasady termodynamiki $\Delta U = Q + W$, stąd:

$$Q = \Delta U - W$$

$$Q = 4500 \text{ J} - (-3000 \text{ J})$$

$$Q = 7500 \text{ J} = 7,5 \text{ kJ}$$

(Można też skorzystać ze wzoru ciepła molowego przy stałym ciśnieniu: $C_p = \frac{5}{2}R$, stąd $Q = \frac{5}{2}p\Delta V$).

Przykład 2: Sprawność silnika

Treść: Idealny silnik Carnota pracuje między grzejnikiem o temperaturze $t_1 = 327^\circ\text{C}$ a chłodnicą o temperaturze $t_2 = 27^\circ\text{C}$. W jednym cyklu silnik oddaje do chłodnicy 600 J ciepła. Oblicz pracę użyteczną wykonywaną przez silnik w jednym cyklu.

Rozwiązanie:

1. Zamiana temperatur na kelwiny (Kluczowe!):

$$T_1 = 327 + 273 = 600 \text{ K}$$

$$T_2 = 27 + 273 = 300 \text{ K}$$

2. Obliczenie sprawności ze wzoru Carnota:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{300}{600}$$

$$\eta = 1 - 0,5 = 0,5 \quad (50\%)$$

3. Wykorzystanie drugiego wzoru na sprawność: Wiemy, że $\eta = \frac{W}{Q_p}$ oraz $W = Q_p - |Q_o|$. Skoro $\eta = 0,5$, to połowa pobranego ciepła zamienia się w pracę, a połowa jest oddawana do chłodnicy. Zatem $W = |Q_o|$.

$$Q_p = \frac{|Q_o|}{1 - \eta}$$

$$Q_p = \frac{600}{0,5} = 1200 \text{ J}$$

$$W = Q_p - |Q_o|$$

$$W = 1200 - 600 = 600 \text{ J}$$

5 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. (Analogiczne do Prz. 1)

W cylindrze pod tłokiem znajduje się $n = 3$ mole gazu doskonałego dwuatomowego ($f = 5$). Gaz podgrzano izochorycznie, tak że jego ciśnienie wzrosło trzykrotnie (od wartości $p_1 = 10^5$ Pa). Objętość naczynia to $V = 10 \text{ dm}^3$. Oblicz ciepło dostarczone do układu oraz końcową temperaturę gazu. (**Odp.** $\approx 7500 \text{ J}$, $T_k \approx 120 \text{ K}$).

Zadanie 2. (Analogiczne do Prz. 2)

Silnik cieplny pobiera z grzejnika 2000 J ciepła i wykonuje 400 J pracy użytecznej w jednym cyklu. Oblicz sprawność tego silnika. Ile ciepła silnik oddaje do otoczenia (chłodnicy)? (**Odp.** 20% , 1600 J).

6 Wybrane zadania maturalne (CKE)

Zadanie M1. (Klasyka z wykresów $p - V$)

Pewien gaz doskonały jednoatomowy poddano cyklowi przemian termodynamicznych składającemu się z następujących etapów:

- $A \rightarrow B$ rozprężanie izobaryczne przy ciśnieniu $3p_0$ od objętości V_0 do $3V_0$.
- $B \rightarrow C$ oziębianie izochoryczne w objętości $3V_0$ do ciśnienia p_0 .
- $C \rightarrow A$ sprężanie, w którym ciśnienie gazu jest wprost proporcjonalne do jego objętości (na wykresie $p - V$ odcinek linii prostej łączący punkty C i A).

Polecenie 1: Oblicz pracę użyteczną wykonaną przez gaz w trakcie jednego pełnego cyklu (wyraż ją przez p_0 i V_0).

Wskazówka: Praca w cyklu to pole figury na wykresie $p - V$.

$$\begin{aligned}W_{cykl} &= \frac{1}{2} \cdot \Delta V \cdot \Delta p \\W_{cykl} &= \frac{1}{2} \cdot (3V_0 - V_0) \cdot (3p_0 - p_0) \\W_{cykl} &= \frac{1}{2} \cdot 2V_0 \cdot 2p_0 \\W_{cykl} &= 2p_0V_0\end{aligned}$$

Polecenie 2: Oblicz temperaturę gazu w stanie B, jeżeli w stanie A wynosiła ona T_A .

Wskazówka: Zastosuj równanie Clapeyrona do stanów A i B. Ciśnienie w B wynosi $3p_0$ a objętość $3V_0$.

$$\begin{aligned}p_A V_A &= nRT_A \\3p_0 V_0 &= nRT_A \\p_B V_B &= (3p_0) \cdot (3V_0) \\p_B V_B &= 9p_0 V_0 \\9p_0 V_0 &= 3 \cdot (3p_0 V_0) \\9p_0 V_0 &= 3 \cdot nRT_A\end{aligned}$$

Stąd $T_B = 3T_A$.

Zadanie M2. (Kalorymetria i bilans cieplny - stały element matur majowych)

Do aluminiowego kalorymetru o masie $m_k = 0,2 \text{ kg}$ zawierającego $m_w = 0,5 \text{ kg}$ wody o temperaturze początkowej $t_1 = 20^\circ\text{C}$, wrzucono kawałek lodu o masie $m_l = 0,1 \text{ kg}$ i temperaturze $t_2 = 0^\circ\text{C}$. Cały lód stopił się. Wymianę ciepła z otoczeniem zaniedbujemy.

Dane: ciepło właściwe wody $c_w = 4200 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, ciepło topnienia lodu $c_t = 334000 \text{ J}/\text{kg}$, ciepło właściwe aluminium $c_k = 900 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$.

Polecenie: Oblicz temperaturę końcową (t_k) wody w kalorymetrze.

Szkic rozwiązania (Bilans Ciepły): Suma ciepła oddanego jest równa sumie ciepła pobranego.

Ciepło oddają: woda w kalorymetrze i sam kalorymetr, oziębiając się od t_1 do t_k .

$$Q_{odd} = m_w c_w (t_1 - t_k) + m_k c_k (t_1 - t_k)$$

$$Q_{odd} = (t_1 - t_k)(m_w c_w + m_k c_k)$$

Ciepło pobiera lód: najpierw topnieje (bez zmiany temperatury), a powstała z niego woda ogrzewa się od 0°C do t_k .

$$Q_{pob} = m_l c_t + m_l c_w (t_k - 0)$$

Po przyrównaniu $Q_{odd} = Q_{pob}$ wyznaczamy t_k :

$$(t_1 - t_k)(m_w c_w + m_k c_k) = m_l c_t + m_l c_w t_k$$

$$(20 - t_k)(0,5 \cdot 4200 + 0,2 \cdot 900) = 0,1 \cdot 334000 + 0,1 \cdot 4200 \cdot t_k$$

$$(20 - t_k)(2100 + 180) = 33400 + 420t_k$$

$$(20 - t_k) \cdot 2280 = 33400 + 420t_k$$

$$45600 - 2280t_k = 33400 + 420t_k$$

$$45600 - 33400 = 420t_k + 2280t_k$$

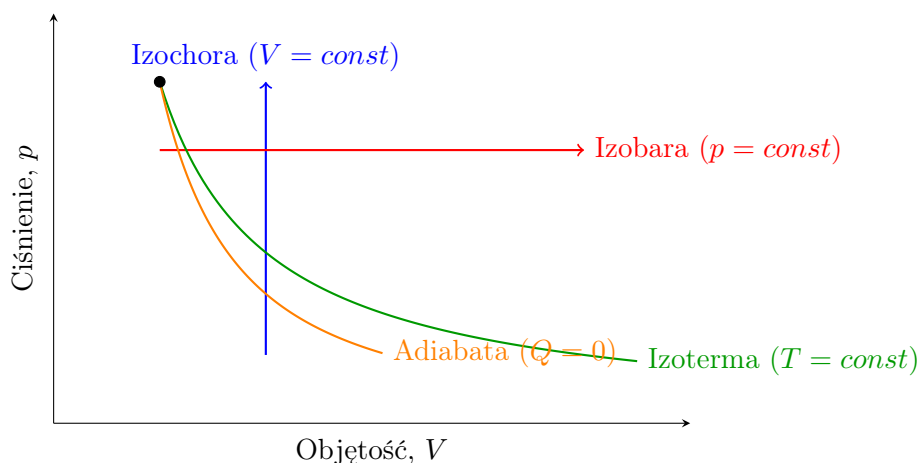
$$12200 = 2700t_k$$

$$t_k = \frac{12200}{2700}$$

$$t_k \approx 4,52^\circ\text{C}$$

7 Przemiany Gazowe i Wykresy (Wymagane na CKE)

Na maturze kluczowe jest czytanie wykresów, szczególnie zależności $p(V)$. Poniżej zestawienie procesów wraz z ich reprezentacją.



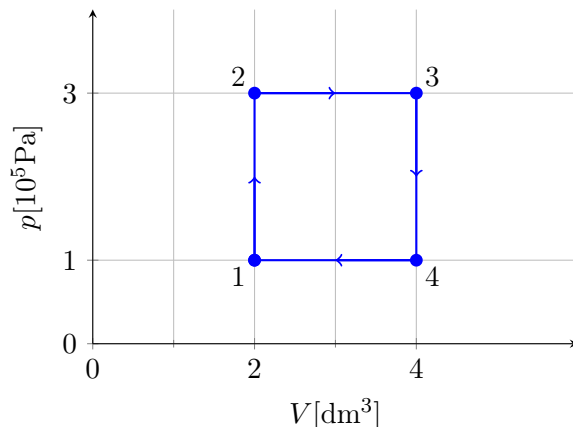
Rysunek 1: Porównanie krzywych przemian termodynamicznych na wykresie $p(V)$. Zauważ, że **adiabata** jest zawsze bardziej stroma od **izotermy** przechodzącej przez ten sam punkt.

- **Izotermiczna** ($T = \text{const}$): $pV = \text{const}$. $\Delta U = 0$, więc $Q = -W = W_{\text{gazu}}$.
- **Izobaryczna** ($p = \text{const}$): $\frac{V}{T} = \text{const}$. Praca: $W = -p\Delta V$. Ciepło: $Q = nc_p\Delta T$ (gdzie $c_p = c_v + R$).
- **Izochoryczna** ($V = \text{const}$): $\frac{p}{T} = \text{const}$. Praca: $W = 0$. Ciepło: $Q = \Delta U = nc_v\Delta T$.
- **Adiabatyczna** ($Q = 0$): Szybkie sprężanie lub rozprężanie, brak wymiany ciepła. $\Delta U = W$. Wykres na $p(V)$ opisywany równaniem Poissona $pV^\kappa = \text{const}$.

Zadanie: Klasyczny cykl termodynamiczny na $p(V)$

Źródło: Inspirowane Matura Maj 2016 (Formuła 2015), Zadanie 8. (Cykl silnika) oraz Maj 2020, Zad. 8.

Gaz doskonały jednoatomowy odbywa cykl przemian ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$) przedstawiony na poniższym wykresie:



Polecenie CKE:

- Nazwij przemiany $1 \rightarrow 2$ oraz $2 \rightarrow 3$.
- Oblicz pracę użyteczną wykonaną przez gaz w trakcie jednego pełnego cyklu.
- Oblicz sprawność tego cyklu.

Rozwiązanie z komentarzem:

- a) W przemianie $1 \rightarrow 2$ objętość $V = \text{const}$, a ciśnienie rośnie - **przemiana izochoryczna**. W przemianie $2 \rightarrow 3$ ciśnienie $p = \text{const}$, a objętość rośnie - **przemiana izobaryczna**.
- b) Praca całkowita w cyklu to po prostu pole figury zamkniętej na wykresie $p(V)$! (Znak pracy zależy od kierunku - tu odbywa się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, więc gaz wykonuje pracę użyteczną dodatnią).

$$\begin{aligned}W_{uz} &= \Delta p \cdot \Delta V \\W_{uz} &= (3 - 1) \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot (4 - 2) \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\W_{uz} &= 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \\W_{uz} &= 400 \text{ J}\end{aligned}$$

Ważne: Na maturze pamiętaj o zamianie decymetrów sześciennych na metry sześcienne ($1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$).

- c) **Sprawność** $\eta = \frac{W_{uz}}{Q_{pob}}$. Gaz pobiera ciepło tam, gdzie rośnie jego temperatura. Patrząc z równania $pV = nRT$, T rośnie gdy rośnie p ($1 \rightarrow 2$) oraz gdy rośnie V ($2 \rightarrow 3$). Ciepło pobrane to:

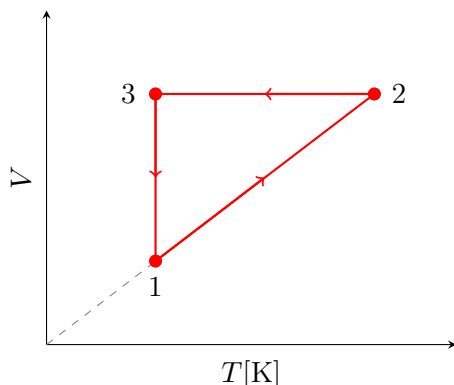
$$\begin{aligned}Q_{pob} &= Q_{12} + Q_{23} \\Q_{pob} &= \Delta U_{12} + (\Delta U_{23} + W_{gazu23}) \\Q_{pob} &= \frac{3}{2}V\Delta p + \left(\frac{3}{2}p\Delta V + p\Delta V\right)\end{aligned}$$

Obliczenia na konkretnych wartościach prowadzą do poprawnego wyniku ułamkowego pokazującego sprawność (najczęściej wynosi kilkanaście procent).

Zadanie: Tłumaczenie wykresów - Zamiana współrzędnych

Źródło: Matura Maj 2018, Zadanie 9. (Hel w cylindrze) oraz Maj 2019, Zad. 8. To zadanie to *must-have*. CKE uwielbia dawać wykresy w innych osiach niż $p(V)$.

Gaz przechodzi cykl przedstawiony na wykresie zależności objętości V od temperatury T .



Polecenie: Narysuj ten sam cykl przemian na wykresie w układzie współrzędnych ciśnienia od objętości $p(V)$.

Wskazówka do rozwiązania:

1. **Analiza 1→2:** Jest to linia prosta, której przedłużenie przechodzi przez początek układu współrzędnych $(0, 0)$. Z matematyki wiemy, że $V \propto T$. Równanie Clapeyrona mówi, że $\frac{V}{T} = \frac{nR}{p}$. Zatem ciśnienie p jest stałe. To **izobara**.
2. **Analiza 2→3:** Objętość jest stała ($V = \text{const}$). Temperatura spada. To **izochora**.
3. **Analiza 3→1:** Temperatura jest stała (linia pionowa na wykresie $V(T)$). Objętość maleje. To **izotermiczne sprężanie**.
4. **Wniosek:** Na nowym wykresie $p(V)$ rysujemy: poziomą linię (1→2), pionową linię (2→3) oraz krzywą hiperboli (3→1) łączącą punkt 3 z 1.

Zadanie: Szybkie sprężanie i Pierwsza Zasada (Adiabata)

Źródło: Zbliżone do Matury Maj 2021, Zadanie 9. (Sprężanie powietrza w pompce).

W szczelnym cylindrze z ruchomym tłokiem znajduje się gaz. Tłok gwałtownie wciśnięto, zmniejszając objętość gazu o połowę. **Pytanie CKE:** Jak zmieniła się energia wewnętrzna gazu? Odpowiedź uzasadnij, odwołując się do I zasady termodynamiki oraz odpowiedniego rodzaju przemiany.

Uzasadnienie (na max punktów CKE): Proces wciskania tłoka odbywa się **gwałtownie** (szybko), co w termodynamice oznacza, że układ nie zdąży wymienić ciepła z otoczeniem. Jest to **przemiana adiabatyczna** ($Q = 0$). Z I zasady termodynamiki:

$$\Delta U = W + Q$$

$$\Delta U = W + 0$$

$$\Delta U = W$$

Ponieważ nad gazem została wykonana praca przez siłę zewnętrzną ($W > 0$, bo objętość zmalała), to $\Delta U = W > 0$. Energia wewnętrzna gazu (i jego temperatura) **wzrosła**.

Powodzenia na maturze!